ANNEE 1981

CONCOURS D'ADMISSION A L'ECOLE DE L'AIR

DEUXIEME EPREUVE A OPTION

COMPOSITION DE MATHEMATIQUES M

(durée : 4 h 00 - coefficient : 10)

---==oOOo==---

Cette épreuve est réservée aux candidats ayant composé en mathématiques M - P lors de la première épreuve à option. Son choix implique impérativement une option analogue lors des épreuves orales.

---==oOOo==---

Les deux problèmes sont indépendants.

PROBLEME 1

Les quatre questions du problème portent sur l'étude d'une même suite de fonctions, mais sont indépendantes et peuvent être traitées dans un ordre quelconque.

I)

On considère la suite de fonctions réelles f_1, f_2, .., f_n définies sur $\mathbb{R}^+$

$$f_n \quad (x \in \mathbb{R}^+) \quad \begin{cases} x > 0 & f_n(x) = \dfrac{(\sin x)^n}{x} \\ x = 0 & f_n \text{ prolongée par continuité.} \end{cases}$$

Pour quelles valeurs de x, la suite f_n converge-t-elle vers une fonction f ?

Dans quels intervalles de $\mathbb{R}$ la convergence précédente est-elle uniforme ?

II)

Etudier les fonctions $y = f_n(x)$

Suivant les valeurs de n, indiquer l'allure du graphique en repère orthonormé.

En particulier :

1) On précisera l'allure du graphique pour $x \in [0, \pi]$

2) On montrera que la dérivée, entre autres valeurs, s'annule une fois, et une fois seulement, pour x dans chacun des intervalles :

$$]\pi, \frac{3\pi}{2}[\ ,\ ]2\pi, \frac{5\pi}{2}[\ , \ldots\ ,\ ]k.\pi, k.\pi + \frac{\pi}{2}[\ , \ldots$$

III)

Etudier la nature des intégrales

$$\int_0^{+\infty} f_n(x)\, dx$$

On distinguera n impair et n pair.
Pour n impair, on pourra se ramener à l'étude d'une série.
Pour n pair, on ne considèrera que le cas n = 4.

IV)

On considère la série de fonctions :

$x \in \mathbb{R}^+ \longmapsto$ série de terme général $u_n(x) = f_n(x)$

Pour quelles valeurs de x ces séries sont-elles convergentes ?

Dans quels intervalles de $\mathbb{R}$ la convergence précédente est-elle uniforme ?

PROBLEME 2

Soit E un espace vectoriel de dimension finie n ($n \geqslant 2$).

Si f est un endomorphisme de E, on posera :

$f^2 = f \circ f \qquad f^3 = f \circ f \circ f \qquad$ etc...

On désignera par 0 l'endomorphisme zéro.

f est dit nil-potent s'il existe p ($p \in \mathbb{N}^*$) tel que $f^p = 0$.

Le problème étudie les bases de E pour lesquelles la matrice d'un endomorphisme nil-potent a une forme réduite.

1°) f étant nil-potent, $f \neq 0$, on appelle index de f l'entier k ($k > 1$) tel que :

$$f \neq 0 \quad , \quad f^2 \neq 0 \quad , \ldots\ldots , f^{k-1} \neq 0 \quad , \quad f^k = 0 \quad .$$

Montrer :

$$\ker f \subset \ker f^2 \ldots\ldots \subset \ker f^k = E.$$

2°) Il existe donc un vecteur $\vec{u} \in E$

$$\vec{u} \neq \vec{0} \qquad f^{k-1}(\vec{u}) \neq \vec{0}$$

Montrer que $\left\{ \vec{u}, f(\vec{u}), \ldots\ldots, f^{k-1}(\vec{u}) \right\}$ forment un système libre.

Il en résulte donc $k \leqslant n$.

3°) On suppose $k = n$.

$$\vec{\varepsilon}_1 = f^{n-1}(\vec{u}) , \ldots\ldots , \vec{\varepsilon}_{n-1} = f(\vec{u}) , \quad \vec{\varepsilon}_n = \vec{u} \quad .$$

Quelle est la matrice de f dans la base :

$$(\vec{\varepsilon}_1 , \vec{\varepsilon}_2 , \ldots\ldots , \vec{\varepsilon}_n)$$

4°) On suppose k = 2

donc $f \neq 0$ $f^2 = 0$

Montrer que : $\text{Im}(f) \subset \ker(f)$

Si r est le rang de f , montrer que : $2r \leqslant n$.

Soit F un supplémentaire de ker (f) dans E

donc $\ker(f) \oplus F = E$

Soit $(\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_r)$ une base de F.

Montrer que $\left\{f(\vec{a}_1), \ldots, f(\vec{a}_r)\right\}$ forment un système libre de ker (f).

On peut donc prendre pour base de E la réunion :

1) $\left(f(\vec{a}_1), \ldots, f(\vec{a}_r)\right)$ éventuellement complétée pour former une base de ker (f)

2) $\left(\vec{a}_1, \ldots\ldots, \vec{a}_r\right)$

Quelle est la matrice de f dans cette base ?

Exemple : soit f , endomorphisme de $\mathbb{R}^3$, dont la matrice, rapportée à la base naturelle, est :

$$A = \begin{bmatrix} 0 & a & a \\ 0 & b & b \\ 0 & -b & -b \end{bmatrix} \qquad a \neq 0 \qquad b \neq 0 \qquad a \neq b$$

Trouver une base pour laquelle la matrice de f a une forme réduite.

Vérifier par la matrice de passage.

5°) On suppose k = 3

donc $f \neq 0$ $f^2 \neq 0$ $f^3 = 0$

Supposons de plus $\ker f \neq \ker f^2$.

Soit F_1 un supplémentaire de ker f dans $\ker f^2$

donc $\ker f \oplus F_1 = \ker f^2$

On prend pour base de $\ker f^2$

$B_1 = \left\{\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_p, \vec{b}_1, \ldots, \vec{b}_q\right\}$

$(\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_p)$ base de $\ker f$, $(\vec{b}_1, \ldots, \vec{b}_q)$ base de F_1 .

Montrer que $\left\{f(\vec{b}_1), \ldots, f(\vec{b}_q)\right\}$ forment un système libre de $\ker f^2$.

En déduire que $f(\vec{b}_1), \ldots, f(\vec{b}_q)$, décomposés dans la base B_1 , ont leurs q dernières coordonnées nulles.

Soit de même F_2 un supplémentaire de $\ker f^2$ dans E.

$$\ker f^2 \oplus F_2 = \ker f^3 = E$$

On prend pour base de E

$B = \left\{\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_p, \vec{b}_1, \ldots, \vec{b}_q, \vec{c}_1, \ldots, \vec{c}_m\right\}$

$(\vec{c}_1, \ldots, \vec{c}_m)$ étant une base de F_2 .

Montrer que $\left\{f^2(\vec{c}_1), \ldots, f^2(\vec{c}_m)\right\}$ forment un système libre de E.

En déduire que $f(\vec{c}_1), \ldots, f(\vec{c}_m)$, décomposés dans la base B ont leurs m dernières composantes nulles.

Quelle est l'allure de la matrice de f dans la base B ?

Que deviennent les résultats précédents si $\ker f = \ker f^2$.

6°) Généralisation k quelconque $(k > 1)$

$(k \leqslant n)$

On utilisera dans le cas général F_1 , F_2 , ...

Tels que $\ker(f) \oplus F_1 = \ker f^2$

$\ker f^2 \oplus F_2 = \ker f^3$

$\vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots$

$\ker f^{k-1} \oplus F_{n-1} = \ker f^k = E.$

7°) Toutes les matrices précédentes ont une propriété commune : les éléments de la diagonale et les éléments au-dessous de la diagonale sont tous nuls.

Montrer que réciproquement, une telle matrice définit un endomorphisme nil-potent.

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail